

L'ordre dans : $\mathbb{R}$ Leçon L'ordre dans $\mathbb{R}$
Présentation globale leI) L'ordre dans : $\mathbb{R}$ II) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

III) La valeur absolue et propriétés

IV) Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

IV) L'encadrement et la valeur approché

I) L'ordre dans : $\mathbb{R}$

Comparer deux nombres réels a et b , c'est chercher à savoir quel est le plus grand (ou s'ils sont égaux).

1) Définition : soient a et b deux réels.

$a \leq b$ se lit « a inférieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

$b \geq a$ se lit « a supérieur ou égal à b » ce qui équivaut à $(b-a) \in \mathbb{R}^+$ ou $b-a \geq 0$

$a < b$ se lit « a strictement inférieur à b » ce qui équivaut à $b-a > 0$

$a > b$ se lit « a strictement supérieur à b » ce qui équivaut à $b-a < 0$

Ainsi, comparer a et b revient à étudier le signe de $a-b$.

Exemple1 : comparer $\frac{101}{102}$ et $\frac{100}{101}$

SOLUTION :

$$\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{101 \times 101 - 100 \times 102}{101 \times 102} = \frac{10201 - 10200}{101 \times 102}$$

$$\frac{101}{102} - \frac{100}{101} = \frac{1}{101 \times 102} \in \mathbb{R}^+ \text{ donc : } \frac{101}{102} \geq \frac{100}{101}$$

Exemple2 : comparer a et b

$$a = 2 + \sqrt{3} \text{ et } b = 2\sqrt{3}$$

SOLUTION :

$$a - b = 2 - \sqrt{3} \text{ nombre positif}$$

$$\text{cad : } a - b \in \mathbb{R}^{**} \text{ donc : } a > b$$

Exemple3 : comparer $2a$ et $a^2 + 1$ avec $a \in \mathbb{R}$

SOLUTION :

$$(a^2 + 1) - 2a = a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2 \geq 0$$

$$\text{Donc : } a^2 + 1 \geq 2a \text{ si } a \in \mathbb{R}$$

2) Activités : I) comparer les réels suivants :

$$1) \frac{8}{11} \text{ et } \frac{5}{11} \quad 2) \frac{13}{9} \text{ et } \frac{13}{6} \quad 3) \frac{-15}{7} \text{ et } \frac{-15}{4}$$

$$4) \frac{-12}{7} \text{ et } \frac{15}{4} \quad 5) 2\sqrt{5} \text{ et } 5\sqrt{2}$$

II) soient a et b deux réels tel que : $a \leq b$

comparer : 1) $5a$ et $5b$ 2) $-13a$ et $-13b$

III) soient a et b deux réels strictement positifs tel que :

$a \leq b$ comparer : 1) a^2 et b^2 2) $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

$$3) \frac{1}{a} \text{ et } \frac{1}{b}$$

IV) soient a et b deux réels négatifs tel que : $a \leq b$

comparer : a^2 et b^2

SOLUTION : Comparer a et b revient à étudier le signe de : $a-b$.

$$1) \text{ on compare } \frac{8}{11} \text{ et } \frac{5}{11}$$

$$\frac{8}{11} - \frac{5}{11} = \frac{8-5}{11} = \frac{3}{11} \geq 0 \text{ donc } \frac{8}{11} \geq \frac{5}{11}$$

$$2) \text{ on compare } \frac{13}{9} \text{ et } \frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{6} - \frac{13}{9} = \frac{39-26}{18} = \frac{13}{18} > 0 \text{ donc } \frac{13}{6} > \frac{13}{9} \text{ ou } \frac{13}{6} \geq \frac{13}{9}$$

$$3) \text{ on compare } \frac{-15}{7} \text{ et } \frac{-15}{4}$$

$$\frac{-15}{7} - \left(-\frac{15}{4} \right) = \frac{-15}{7} + \frac{15}{4} = \frac{-60+105}{28} = \frac{45}{28} > 0$$

$$\text{donc } \frac{-15}{7} > -\frac{15}{4} \text{ ou } \frac{-15}{7} \geq -\frac{15}{4}$$

$$4) \text{ on compare } \frac{-12}{7} \text{ et } \frac{15}{4}$$

$$\frac{-12}{7} - \frac{15}{4} = \frac{-48-105}{28} = \frac{-165}{28} < 0 \text{ donc } \frac{-12}{7} < \frac{15}{4}$$

$$\text{ou } \frac{-12}{7} \leq \frac{15}{4}$$

$$5) \text{ on compare } 2\sqrt{5} \text{ et } 5\sqrt{2}$$

On a $(2\sqrt{5})^2 = 20$ et $(5\sqrt{2})^2 = 50$ et
 $50 - 20 = 30 > 0$ et puisque $2\sqrt{5}$ et $5\sqrt{2}$ sont positifs
alors $5\sqrt{2} > 2\sqrt{5}$

II) soient a et b deux réels tel que : $a \leq b$

1) on compare $5a$ et $5b$

On a : $5a - 5b = 5(a - b)$ et puisque $a \leq b$ alors
 $a - b \leq 0$

Et on a : $5 > 0$ donc $5a \leq 5b$

2) on compare $-13a$ et $-13b$

On a : $-13a - (-13b) = -13a + 13b = -13(a - b)$ et
puisque $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$

Et on a : $-13 < 0$ donc $-13a \geq -13b$

III) soient a et b deux réels strictement positifs tel que :
 $a \leq b$

1) on compare : a^2 et b^2

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

On a : a et b deux réels strictement positifs donc $a + b \geq 0$
et puisque $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$

alors : $(a - b)(a + b) \leq 0$

D'où $a^2 \leq b^2$

2) on compare : $\sqrt{a}$ et $\sqrt{b}$

$$\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})(\sqrt{a} + \sqrt{b})}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a^2} - \sqrt{b^2}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$$

On a : $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$

et puisque $\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq 0$ car c'est la somme de deux
nombres positifs

donc $\frac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} \leq 0$ D'où $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

3) on compare : $\frac{1}{a}$ et $\frac{1}{b}$

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab}$$

On a : $a \leq b$ alors $b - a \geq 0$

et puisque a et b deux réels strictement positifs alors $ab > 0$
car c'est la produit de deux nombres positifs

donc $\frac{b - a}{ab} \geq 0$ D'où $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$

IV) soient a et b deux réels strictement négatifs tel que :
 $a \leq b$

on compare : a^2 et b^2

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

On a : a et b deux réels négatifs donc $a + b \leq 0$

et puisque $a \leq b$ alors $a - b \leq 0$ alors : $(a - b)(a + b) \geq 0$

D'où $a^2 \geq b^2$

II) L'ordre et les opérations dans $\mathbb{R}$

1) L'ordre et l'addition

Propriété : Soient a et b et c trois nombres réels

✓ Si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$ et $a - c \leq b - c$

✓ Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$

(On peut ajouter membre a membre deux inégalités de même sens)

Remarque : on ne peut pas retrancher membre a membre
deux inégalités de même sens

Exemple :

On a : $4 \leq 6$ et $2 \leq 6$ mais $4 - 2 > 6 - 6$

2) L'ordre et la multiplication

Propriétés :

1) $ab \geq 0$ ssi $a \geq 0$ ou $b \geq 0$ ou $a \leq 0$ ou $b \leq 0$

(le produit de deux réel de même signe et toujours positifs)

2) si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$

si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$

3) si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$

si $0 \leq a \leq b$ alors $a^2 \leq b^2$ et $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$

4) si $a \leq b \leq 0$ alors $a^2 \geq b^2$

5) si $ab > 0$ on a : si $a \leq b$ alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$ (Autrement dit,

deux nombres strictement positifs ou strictement négatifs
sont rangés dans l'ordre contraire de leur inverse.

Application 1:

Soit a est un réel strictement positif.

1. montrer que : Si $a > 1$, alors $a^3 > a^2 > a$

2. montrer que : si $a < 1$, alors $a^3 < a^2 < a$.

SOLUTION :

De l'hypothèse $a > 1$, on déduit d'une part que $a^2 > a$ (on
multiplie les deux membres par
 $a > 0$) et d'autre part que $a^3 > a^2$ (on multiplie par $a^2 > 0$).
Donc $a^3 > a^2 > a$.

De la même façon, lorsque $0 < a < 1$, on démontre que :
 $a^3 < a^2 < a$.

Remarque : pour $a = 0$ et $a = 1$, $a = a^2 = a^3$.

Exercice 1 : comparer a et b :

$$a = \sqrt{6} \text{ et } b = \sqrt{3} + \sqrt{2} - 1$$

SOLUTION :

$$a - b = \sqrt{3} \times \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{2} + 1 = \sqrt{3} \times (\sqrt{2} - 1) - (\sqrt{2} - 1)$$

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1)$$

on compare : $\sqrt{2}$ et 1

$$\text{On a } (\sqrt{2})^2 = 2 \text{ et } (1)^2 = 1 \text{ donc } \sqrt{2} > 1$$

par suite $(\sqrt{2} - 1) \in \mathbb{R}^{++}$

$$\text{On a } (\sqrt{3})^2 = 3 \text{ et } (1)^2 = 1 \text{ donc } \sqrt{3} > 1$$

par suite $(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{++}$ Donc

$$a - b = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{3} - 1) \in \mathbb{R}^{++} \text{ D'où } a > b$$

Exercice 2 : soit $x \in \mathbb{R}^{*+}$

1) Comparer : $\sqrt{x+1} + \sqrt{x}$ et $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$

2) En déduire une comparaison de : $\sqrt{x+1} - \sqrt{x}$

et $\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}$

SOLUTION : 1) On a $x+2 \geq x$ car $(x+2) - x \geq 0$

Donc $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{x}$

On ajoutant $\sqrt{x+1}$ au deux membres on trouve :

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

$$2) \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1})(\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \quad (\text{le conjugué})$$

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{(\sqrt{x+2})^2 - (\sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} = \frac{x+2 - x-1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$\text{Donc : } \sqrt{x+2} - \sqrt{x+1} = \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}}$$

$$\text{Et on aussi : } \sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (\sqrt{x})^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{x+1 - x}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$$

$$\text{Et puisque : } \sqrt{x+2} + \sqrt{x+1} \geq \sqrt{x} + \sqrt{x+1}$$

$$\text{On a donc : } \frac{1}{\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{x+1}}$$

$$\text{D'où } \sqrt{x+1} + \sqrt{x} \leq \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2}$$

Exercice 3 : soit $a \in \mathbb{R}^{*+}$ et $b \in \mathbb{R}^{*+}$

$$\text{Comparer : } x = \frac{7a+2b}{7a} \text{ et } y = \frac{8b}{7a+2b}$$

SOLUTION : On a $x+2 \geq x$ car $(x+2) - x \geq 0$

$$x - y = \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b}$$

$$x - y = \frac{(7a+2b)^2 - 7a \times 8b}{7a(7a+2b)} = \frac{49a^2 + 14ab + 14ab + 4b^2 - 56ab}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{49a^2 - 28ab + 4b^2}{7a(7a+2b)} = \frac{(7a)^2 - 2 \times 7a \times 2b + (2b)^2}{7a(7a+2b)}$$

$$x - y = \frac{(7a - 2b)^2}{7a(7a+2b)} \in \mathbb{R}^+$$

car $7a(7a+2b) \in \mathbb{R}^+$ et $(7a-2b)^2 \in \mathbb{R}^+$ D'où $x \geq y$

III) La valeur absolue et propriétés

1) Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit M le point d'abscisse x sur un axe normé (gradué)

La valeur absolue de x est la distance OM et on note : $|x|$

et on a : $OM = |x|$ (O l'origine de l'axe)

2) Conséquence : $x \in \mathbb{R}$

Si $x \geq 0$ alors $|x| = x$ et Si $x \leq 0$ alors $|x| = -x$

Exemples : calculer les expressions suivantes (éliminer le signe de valeur absolue)

$$1) |-3| \quad 2) |3| \quad 3) \left| -\frac{3}{5} \right| \quad 4) |\sqrt{5} - 2| \quad 5) |1 - \sqrt{3}|$$

$$6) |\pi - 4| \quad 7) |\sqrt{2} - \sqrt{7}| \quad 8) |3 - 2\sqrt{3}|$$

$$9) A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$$

SOLUTION : 1) $|-3| = -(-3) = 3$ 2) $|3| = 3$ 3) $\left| -\frac{3}{5} \right| = \frac{3}{5}$

$$4) |\sqrt{5} - 2| \quad \text{on compare : } \sqrt{5} \text{ et } 2$$

On a $(\sqrt{5})^2 = 5$ et $(2)^2 = 4$ donc $\sqrt{5} > 2$ par suite

$$(\sqrt{5} - 2) \in \mathbb{R}^{*+} \text{ Donc } |\sqrt{5} - 2| = \sqrt{5} - 2$$

$$5) |1 - \sqrt{3}| \quad \text{on compare : } \sqrt{3} \text{ et } 1$$

On a $(\sqrt{3})^2 = 3$ et $(1)^2 = 1$ donc $\sqrt{3} > 1$ par suite

$$(1 - \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^{-} \text{ donc } |1 - \sqrt{3}| = -(1 - \sqrt{3}) = -1 + \sqrt{3}$$

$$6) |\pi - 4| = -(\pi - 4) = -\pi + 4 \text{ car } 4 > \pi$$

$$7) |\sqrt{2} - \sqrt{7}| \quad \text{on compare : } \sqrt{7} \text{ et } \sqrt{2}$$

On a $(\sqrt{7})^2 = 7$ et $(\sqrt{2})^2 = 2$ donc $\sqrt{7} > \sqrt{2}$

par suite $\sqrt{2} - \sqrt{7} < 0$

$$\text{Donc } |\sqrt{2} - \sqrt{7}| = -(\sqrt{2} - \sqrt{7}) = -\sqrt{2} + \sqrt{7}$$

$$8) \text{ on a } 3 < 2\sqrt{3} \text{ car } 3^2 < (2\sqrt{3})^2$$

$$\text{Donc : } 3 - 2\sqrt{3} \in \mathbb{R}^{-}$$

$$\text{Donc : } |3 - 2\sqrt{3}| = -(3 - 2\sqrt{3}) = -3 + 2\sqrt{3}$$

$$9) \text{ on a : } \sqrt{5} > \sqrt{2} \text{ donc : } \sqrt{5} - \sqrt{2} \in \mathbb{R}^+ \text{ donc : } |\sqrt{5} - \sqrt{2}| = \sqrt{5} - \sqrt{2}$$

$$A = |4 - 2\sqrt{3}| - |5 - 3\sqrt{3}| + |9 - 5\sqrt{3}|$$

$$A = 4 - 2\sqrt{3} - (5 - 3\sqrt{3}) + (5\sqrt{3} - 9)$$

$$A = 4 - 2\sqrt{3} + 5 - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 9 = 0$$

Remarque : Si x est un nombre réel, $|x^2| = x^2$ car $x^2 \geq 0$.

3) Définition : Soit $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$ et soit A et B les point d'abscisses respectives a et b sur un axe normé(graduée)

La distance entre a et b c'est la distance AB et on la note $AB = |a - b|$

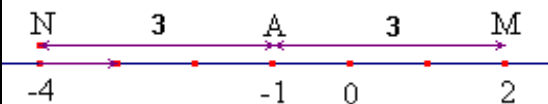
Remarque : $AB = BA$ donc $|a - b| = |b - a|$

Exemples :

$$MN = |2 - (-4)| = |2 + 4| = |6| = 6$$

$$AM = |2 - (-1)| = |3| = 3$$

$$AN = |-1 - (-4)| = |-1 + 4| = |3| = 3$$



4) Propriétés : $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}^*$ et $a \in \mathbb{R}^+$

$$|x| \geq 0 ; |x^2| = |x|^2 = x^2 ; -|x| \leq x \leq |x| ; |x| = |-x|$$

$$\sqrt{x^2} = |x| ; |xy| = |x||y| ; |x + y| \leq |x| + |y| ; \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$$

$$|x| = a \text{ équivaut à dire que } x = a \text{ ou } x = -a$$

$$|x| = |y| \text{ équivaut à dire que } x = y \text{ ou } x = -y$$

Dire que $|x| = 0$ équivaut à dire que $x = 0$.

Applications : (Résolution des équations)

Résoudre les équations suivantes :

$$1) |x - 1| = 5 \quad 2) |2x + 1| = |x - 3| \quad 3) |x + 2| = -1$$

SOLUTION : 1) $|x - 1| = 5$

$$|x - 1| = 5 \text{ ssi } x - 1 = 5 \text{ ou } x - 1 = -5$$

$$\text{ssi } x = 6 \text{ ou } x = -4 \text{ donc : } S = \{-4; 6\}$$

$$2) |2x + 1| = |x - 3| \text{ ssi } 2x + 1 = x - 3 \text{ ou } 2x + 1 = -(x - 3)$$

$$\text{ssi } 2x + 1 = x - 3 \text{ ou } 2x + 1 = -x + 3$$

$$\text{ssi } x = -4 \text{ ou } x = \frac{2}{3} \text{ donc : } S = \left\{ -4; \frac{2}{3} \right\}$$

$$3) |x + 2| = -1 \quad S = \emptyset \quad \text{car } |x + 2| \geq 0$$

Exercice 4 : 1) calculer $(3\sqrt{2} - 5)^2$

$$2) \text{comparer : } 3\sqrt{2} \text{ et } 5$$

$$3) \text{simplifier } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}}$$

SOLUTION : 1)

$$(3\sqrt{2} - 5)^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2 \times 3\sqrt{2} \times 5 + (5)^2 = 18 - 30\sqrt{2} \times 5 + 25$$

$$(3\sqrt{2} - 5)^2 = 43 - 30\sqrt{2}$$

$$2) (3\sqrt{2})^2 = 18 \quad \text{et} \quad (5)^2 = 25$$

$$\text{Donc } 3\sqrt{2} > 5 \text{ donc } 3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^-$$

$$3) \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = \sqrt{(3\sqrt{2} - 5)^2} = |3\sqrt{2} - 5| = -(3\sqrt{2} - 5)$$

$$\text{car } 3\sqrt{2} - 5 \in \mathbb{R}^- \text{ donc } \sqrt{43 - 30\sqrt{2}} = -3\sqrt{2} + 5$$

IV) Intervalles dans l'ensemble des nombres réels

1) définition :

a et b sont deux réels tels que $a < b$.

Le tableau ci-dessous résume les différents types d'intervalles.

L'intervalle noté ...	inégalité ...	Représentation de cet intervalle sur une droite graduée
$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
$]a ; b[$	$a < x < b$	
$]a ; b]$	$a < x \leq b$	
$[a ; b[$	$a \leq x < b$	
$[a ; +\infty[$	$a \leq x$	
$]a ; +\infty[$	$a < x$	
$] -\infty ; b]$	$x \leq b$	
$] -\infty ; b[$	$x < b$	

Vocabulaire : $[a ; b]$, $]a ; b[$, $]a ; b]$ et $[a ; b[$ sont des intervalles d'extrémités a et b ($a < b$). Le centre de l'intervalle est le nombre $\frac{b-a}{2}$, et sa longueur est $b - a$.

Remarques : $-\infty$ (moins l'infini) et $+\infty$ (plus l'infini) ne sont pas des nombres, ce sont des symboles.

Du côté de $-\infty$ et de $+\infty$, le crochet est toujours ouvert

L'ensemble des réels $\mathbb{R}$ se note aussi $] -\infty ; +\infty[$.

$$\mathbb{R}^+ = [0, +\infty[\text{ et } \mathbb{R}^- =]-\infty, 0] \text{ et } \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[\text{ et }$$

$$\mathbb{R}_-^* =]-\infty, 0[$$

2) Réunion et intersection d'intervalles

L'**intersection** de deux intervalles est l'ensemble des

nombre réels appartenant **à la fois** aux deux intervalles.

La **réunion** de deux intervalles est l'ensemble des nombre réels appartenant à l'un **ou** l'autre de ces intervalles (les éléments de l'intersection appartiennent aussi à la réunion).

Exemples : simplifier si c'est possible

- 1) $[2; 5] \cap [4; 6]$ 2) $[2; 5] \cup [4; 6]$
 3) $]-\infty; 2] \cap [-1; +\infty[$ 4) $]-\infty; 2] \cup [-1; +\infty[$

SOLUTION : 1) $[2; 5] \cap [4; 6] = [4; 5]$

2) $[2; 5] \cup [4; 6] = [2; 6]$.



3) $]-\infty; 2] \cap [-1; +\infty[= [-1; 2]$



4) $]-\infty; 2] \cup [-1; +\infty[=]-\infty; +\infty[$

Exercice 5 : calculer $I \cap J$ et $I \cup J$ dans les cas suivants

$$J = [-1; +\infty[\text{ et } I =]-3; 7]$$

$$J = [4; 10] \text{ et } I =]-\infty; 5]$$

$$I = [0; 10[\text{ et } J = [-5; -1]$$

$$I = \left[-\frac{2}{3}; 2\right] \text{ et } J = \left[-1; \frac{3}{2}\right]$$

SOLUTION : $I \cap J =]-1; 7]$ et $I \cup J =]-3; +\infty[$

$$I \cap J = [4; 5[\text{ et } I \cup J =]-\infty; 10]$$

$$I \cap J = \emptyset \text{ et } I \cup J = [-5; 10]$$

$$I \cap J = \left[-\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right] \text{ et } I \cup J = [-1; 2]$$

Exercice 6 : représenter chaque inégalité ou encadrement

par l'intervalle qui convient ; 1) $x \geq -3$ 2) $x < 5$

3) $1 \leq 2x \leq 4$ 4) $0 < 6x - 2 \leq 10$ 5) $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$

SOLUTION : 1) $x \geq -3$ ssi $x \in [-3; +\infty[$

2) $x < 5$ ssi $x \in]-\infty; 5]$

3) $1 \leq 2x \leq 4$ ssi $\frac{1}{2} \times 1 \leq \frac{1}{2} \times 2x \leq 4 \times \frac{1}{2}$ ssi $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

ssi $x \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$

4) $0 < 6x - 2 \leq 10$ ssi $0 + 2 < 6x - 2 + 2 \leq 10 + 2$
 ssi $2 < 6x \leq 12$

ssi $2 \times \frac{1}{2} < 6x \times \frac{1}{2} \leq 12 \times \frac{1}{2}$ ssi $1 < 3x \leq 6$ ssi

$1 \times \frac{1}{3} < 3x \times \frac{1}{3} \leq 6 \times \frac{1}{3}$ ssi $\frac{1}{3} < x \leq 2$ ssi $x \in \left]\frac{1}{3}; 2\right]$

5) $-8 \leq 2 - 2x \leq 6$ ssi $-8 - 2 \leq 2 - 2x - 2 \leq 6 - 2$
 ssi $-10 \leq -2x \leq 4$

ssi $-10 \times \frac{1}{2} \leq -2x \times \frac{1}{2} \leq 4 \times \frac{1}{2}$ ssi $-5 \leq -x \leq 2$ ssi

$-2 \leq x \leq 5$ ssi $x \in [-2; 5]$

Exercice 7 : résoudre les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x > 7 \\ x \geq 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases}$

SOLUTION : $\begin{cases} \text{c'est l'intersection} \end{cases}$

1) $\begin{cases} x \geq -3 \\ x > 2 \end{cases}$

$x \geq -3$ ssi $x \in [-3; +\infty[$ et $x > 2$ ssi $x \in]2; +\infty[$

$S =]2; +\infty[\cap [-3; +\infty[=]2; +\infty[$

2) $\begin{cases} x > 5 \\ x \leq 4 \end{cases}$

$x \leq 4$ ssi $x \in]-\infty; 4]$ et $x > 5$ ssi $x \in]5; +\infty[$

$S =]5; +\infty[\cap]-\infty; 4] = \emptyset$

3) $x > 7$ ssi $x \in]7; +\infty[$ et $x \geq 0$ ssi $x \in [0; +\infty[$

$S =]7; +\infty[\cap [0; +\infty[=]7; +\infty[$

4) $\begin{cases} -3 \leq x \leq 0 \\ -7 < x < 10 \end{cases}$

$x \in]-7; 10[$ ssi $-7 < x < 10$

$-3 \leq x \leq 0$ ssi $x \in [-3; 0]$

$S =]-7; 10[\cap [-3; 0] = [-3; 0]$

Définition : Soient a , b et x trois nombre réels tq $a \leq b$.

On pose $I = [a; b]$ ou $I =]a; b[$ ou $I = [a; b[$ ou $I =]a; b]$

(Intervalles **bornés** d'extrémités a et b .)

Le **réel** $\frac{a+b}{2}$ est le milieu de intervalle I

Le **réel** $b - a$ est la amplitude de intervalle I

Le **réel** $\frac{b-a}{2}$ est le rayon de intervalle I

EXEMPLE : on considéré l'intervalle $I = [-3; 4]$

$\frac{-3+4}{2} = \frac{1}{2}$ est le milieu de intervalle I

$4 - (-3) = 7$ est la amplitude de intervalle I

$\frac{4 - (-3)}{2} = \frac{7}{2}$ est le rayon de intervalle I

3) Les intervalles et la valeur absolue

Propriété : $x \in \mathbb{R}$ et $r \in \mathbb{R}^{+*}$

$$|x| \leq r \text{ ssi } -r \leq x \leq r \text{ ssi } x \in [-r; r]$$

$$|x| \geq r \text{ ssi } x \geq r \text{ ou } x \leq -r$$

Applications (Résolution des inéquations)

Résoudre les inéquations suivantes : $|2x+1| < 6$

$$1) |x-1| \leq 2 \quad 2) |x+2| \geq 3 \quad 3) |2x+1| < 6$$

SOLUTION : 1) $|x-1| \leq 2$ ssi $-2 \leq x-1 \leq 2$ ssi $-2+1 \leq x-1+1 \leq 2+1$ ssi $-1 \leq x \leq 3$ donc $S = [-1; 3]$

$$2) |x+2| \geq 3 \text{ ssi } x+2 \geq 3 \text{ ou } x+2 \leq -3$$

$$\text{Ssi } x \geq 1 \text{ ou } x \leq -5$$

$$\text{Ssi } x \in [1; +\infty[\text{ ou } x \in]-\infty; -5]$$

$$\text{Donc } S =]-\infty; -5] \cup [1; +\infty[$$

$$3) |2x+1| < 6 \text{ ssi } -6 < 2x+1 < 6$$

$$\text{ssi } -6-1 < 2x+1-1 < 6-1 \text{ ssi } -7 < 2x < 5$$

$$\text{ssi } -7 \times \frac{1}{2} < 2x \times \frac{1}{2} < 5 \times \frac{1}{2} \text{ ssi } -\frac{7}{2} < x < \frac{5}{2} \text{ donc } S = \left] -\frac{7}{2}; \frac{5}{2} \right[$$

Exercice 8 : Soit x et y deux réels tq : $x \geq \frac{1}{2}$ et $y \leq 1$

$$\text{et } x-y=3$$

$$1) \text{ Calculer : } E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2}$$

$$2) \text{ Montrer que : } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ et } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$3) \text{ Calculer : } F = |x+y-5| + |x+y+2|$$

SOLUTION : 1)

$$E = \sqrt{(2x-1)^2} + \sqrt{(2y-2)^2} = |2x-1| + |2y-2|$$

$$\text{On a } x \geq \frac{1}{2} \text{ donc } 2x \geq 1 \text{ donc } 2x-1 \geq 0$$

$$\text{Et on a } y \leq 1 \text{ donc } 2y \leq 2 \text{ donc } 2y-2 \leq 0$$

$$\text{donc } E = |2x-1| + |2y-2| = 2x-1 - (2y-2)$$

$$\text{donc } E = 2x-2y+1 = 2(x-y)+1$$

$$\text{et on a } x-y=3 \text{ donc } E = 2 \times 3 + 1 = 7$$

$$2) \text{ on montre que } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ ???}$$

$$\text{On a } x-y=3 \text{ donc } x=y+3$$

$$\text{Et on a } x \geq \frac{1}{2} \text{ donc } y+3 \geq \frac{1}{2} \text{ donc } y \geq \frac{1}{2}-3 \text{ donc } y \geq -\frac{5}{2}$$

$$\text{Et on a } y \leq 1 \text{ donc } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1$$

$$\text{on montre que } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ ???}$$

$$\text{On a } x-y=3 \text{ donc } y=x-3$$

$$\text{Et On a } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ donc } -\frac{5}{2} \leq x-3 \leq 1$$

$$\text{donc } -\frac{5}{2}+3 \leq x-3+3 \leq 1+3 \text{ D'où } \frac{1}{2} \leq x \leq 4$$

$$3) F = |x+y-5| + |x+y+2| \text{ ???}$$

On cherche le signe de : $x+y-5$

$$\text{On a } -\frac{5}{2} \leq y \leq 1 \text{ et } \frac{1}{2} \leq x \leq 4 \text{ donc } \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \leq x+y \leq 1+4$$

$$\text{donc } -2 \leq x+y \leq 5$$

$$\text{donc } -2-5 \leq x+y-5 \leq 5-5 \text{ donc } -7 \leq x+y-5 \leq 0$$

$$\text{donc } x+y-5 \leq 0$$

On cherche le signe de : $x+y+2$

$$\text{On a } -2 \leq x+y \leq 5 \text{ donc } -2+2 \leq x+y+2 \leq 5+2$$

$$\text{donc } 0 \leq x+y+2 \leq 7$$

$$\text{donc } x+y+2 \geq 0$$

$$\text{donc } F = |x+y-5| + |x+y+2| = -(x+y-5) + x+y+2$$

$$F = -x-y+5+x+y+2 = -x-y+5+x+y+2 = 7$$

IV) L'encadrement et la valeur approché

1) Encadrement :

Définition : Réaliser un encadrement du réel x , c'est trouver deux nombres assez proche a et b tel que, $a < x < b$ ou

$$a \leq x \leq b \text{ ou } a < x \leq b \text{ ou } a \leq x < b$$

Chacun de ces doubles égalités s'appelle un encadrement du réel x d'amplitude $b-a$

Plus cette amplitude est réduite et plus l'encadrement est précis.

a s'appelle une approximation du réel x par défaut à $b-a$ près (ou avec la précision $b-a$)

b s'appelle une approximation du réel x par excès à $b-a$ près (ou avec la précision $b-a$)

Exemple : on a $(\sqrt{3} \approx 1.732050808...)$

$$\text{Donc } \textcircled{1} 1.73 \leq \sqrt{3} \leq 1.74 \text{ et } \textcircled{2} 1.732 \leq \sqrt{3} \leq 1.733$$

$\textcircled{1}$ est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.74-1.73$ près

$$c \text{ à } d \text{ à } 10^{-2} = 0.01 \text{ près}$$

$\textcircled{2}$ est un encadrement du réel $\sqrt{3}$ à $1.733-1.732$ près

$$c \text{ à } d \text{ à } 10^{-3} = 0.001 \text{ près}$$

Et on a 1.73 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par défaut à 10^{-2} près

1.74 est une approximation du réel $\sqrt{3}$ par excès à 10^{-2} près

Exercice 9 : x est un réel tel que $-1 < x < 2$. On pose

$$B = -2x - 3.$$

Trouver un encadrement de B et trouver son amplitude

2) Encadrements et opérations

- Encadrements et additions

Considérons deux réels x et y tels que :

$$a < x < b \text{ et } c < y < d \text{ alors on a } a+c < x+y < b+d.$$

- Problème de la soustraction

Pour encadrer le résultat d'une soustraction, on commence par la remplacer par une addition

(Soustraire c'est ajouter l'opposé)

- Encadrements et multiplications

Considérons deux nombres réels positifs x et y tels que :

$$0 < a < x < b \text{ et } 0 < c < y < d.$$

Le produit xy est alors encadrée par ac et bd .

$$\text{On a } ac < xy < bd.$$

Il suffit de multiplier les bornes des encadrements de x et y pour obtenir un encadrement de xy .

Remarque : Pour encadrer le résultat d'une division, on commencera par la remplacer par une multiplication (diviser c'est multiplier par l'inverse).

Applications1 : $x \in [1;3]$ et $y \in [2;4]$

1) Trouver un encadrement de : x^2 et y^2 et $2x$ et $3y$ et $-x$ et $-y$ et $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{y}$ et $\frac{x}{y}$

2) Trouver un encadrement de : $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$ et $B = \frac{2x-1}{x+1}$ et trouver les amplitudes des encadrements

SOLUTION : 1) $x \in [1;3]$ ssi $1 \leq x \leq 3$ et $y \in [2;4]$ ssi $2 \leq y \leq 4$

$$\text{On a } 1 \leq x \leq 3 \text{ donc } 1^2 \leq x^2 \leq 3^2 \text{ donc } 1 \leq x^2 \leq 9$$

$$\text{On a } 2 \leq y \leq 4 \text{ donc } 2^2 \leq y^2 \leq 4^2 \text{ donc } 4 \leq y^2 \leq 16$$

$$\text{On a } 1 \leq x \leq 3 \text{ donc } 2 \times 1 \leq 2x \leq 2 \times 3 \text{ donc } 2 \leq 2x \leq 6$$

$$\text{On a } 2 \leq y \leq 4 \text{ donc } 3 \times 2 \leq 3y \leq 3 \times 4 \text{ donc } 6 \leq 3y \leq 12$$

$$6 \leq 3y \leq 12$$

$$\text{On a } 1 \leq x \leq 3 \text{ donc } -3 \leq -x \leq -1$$

$$\text{On a } 2 \leq y \leq 4 \text{ donc } -4 \leq -y \leq -2$$

$$\text{On a } 1 \leq x \leq 3 \text{ donc } \frac{1}{3} \leq \frac{1}{x} \leq 1$$

$$\text{On a } 2 \leq y \leq 4 \text{ donc } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{On a } \frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y} \text{ donc } 1 \times \frac{1}{4} \leq x \times \frac{1}{y} \leq 3 \times \frac{1}{2} \text{ donc } \frac{1}{4} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$$

2) encadrement de $A = x^2 + y^2 + 2x - 3y$

$$6 \leq 3y \leq 12 \text{ donc } -12 \leq -3y \leq -6$$

On fait la somme membre a membre on trouve :

$$1 + 4 + 2 - 12 \leq x^2 + y^2 + 2x - 3y \leq 9 + 16 + 6 - 6$$

Donc ① $-5 \leq A \leq 25$ ① est un encadrement du réel A à $25 - (-5) = 30$ près

$$\text{encadrement de } B = \frac{2x-1}{x+1}$$

$$\text{On a } B = \frac{2x-1}{x+1} = (2x-1) \times \frac{1}{x+1}$$

$$\text{et on a } 1 \leq x \leq 3 \text{ donc } 2 \leq 2x \leq 6 \text{ donc } 2-1 \leq 2x-1 \leq 6-1$$

$$\text{donc } 1 \leq 2x-1 \leq 5 \text{ ③}$$

$$\text{et on a } 1 \leq x \leq 3 \text{ donc } 2 \leq x+1 \leq 4 \text{ donc } \frac{1}{4} \leq \frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2} \text{ ④}$$

On fait la produit membre a membre de ③ et ④ on trouve :

$$1 \times \frac{1}{4} \leq (2x-1) \times \frac{1}{x+1} \leq 5 \times \frac{1}{2}$$

$$\text{donc } \frac{1}{4} \leq B \leq \frac{5}{2} \text{ est un encadrement du réel } B$$

$$\text{d'amplitudes } r = \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

Applications2 :

1) Vérifier que $14^2 < 200 < 15^2$ et en déduire que ;

$$1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

2) Trouver un encadrement de : $\sqrt{5}$

3) en déduire un encadrement de : $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ et $\sqrt{10}$

SOLUTION : 1) on a $14^2 = 196$ et $15^2 = 225$ donc

$$14^2 < 200 < 15^2 \text{ donc } \sqrt{14^2} < \sqrt{200} < \sqrt{15^2}$$

$$\text{donc } \sqrt{14^2} < \sqrt{2 \times 100} < \sqrt{15^2} \text{ donc } 14 < \sqrt{2} \times 10 < 15$$

$$\text{donc } 14 \times \frac{1}{10} < \sqrt{2} \times 10 \times \frac{1}{10} < 15 \times \frac{1}{10}$$

$$\text{donc } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5$$

2) on a $22^2 = 484$ et $23^2 = 529$ donc $22^2 < 500 < 23^2$

$$\text{donc } \sqrt{22^2} < \sqrt{500} < \sqrt{23^2}$$

$$\text{donc } 22 < \sqrt{5} \times 10 < 23 \text{ donc}$$

$$22 \times \frac{1}{10} < \sqrt{5} \times 10 \times \frac{1}{10} < 23 \times \frac{1}{10} \text{ donc } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3$$

3)) on a $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ et $2,2 < \sqrt{5} < 2,3$ donc

$$1,4 + 2,2 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 1,5 + 2,3$$

$$\text{donc } 3,6 < \sqrt{2} + \sqrt{5} < 3,8$$

$$\text{on a } 1,4 < \sqrt{2} < 1,5 \text{ et } 2,2 < \sqrt{5} < 2,3 \text{ donc}$$

$$1,4 \times 2,2 < \sqrt{2} \times \sqrt{5} < 1,5 \times 2,3 \text{ donc } 3,08 < \sqrt{10} < 3,45$$

Applications3 : $x \in [-3;1]$ et $y \in [-6;-2]$

Trouver un encadrement de : 1) $x+y$ 2) $x-y$ 3) x^2

$$4) y^2 \quad 5) x \times y \quad 6) \frac{x}{y}$$

SOLUTION : 1) $x \in [-3;1]$ ssi $-3 \leq x \leq 1$

$$y \in [-6;-2] \text{ ssi } -6 \leq y \leq -2$$

$$\text{donc } (-3) + (-6) \leq x + y \leq 1 + (-2)$$

$$\text{donc } -9 \leq x + y \leq -1$$

2) On a $x - y = x + (-y)$ et on a $-6 \leq y \leq -2$

$$\text{donc } 2 \leq -y \leq 6$$

$$\text{donc } (-3) + 2 \leq x + (-y) \leq 1 + 6$$

$$\text{donc } -1 \leq x - y \leq 7$$

3) On a $-3 \leq x \leq 1$ donc $0 \leq x \leq 1$ ou $-3 \leq x \leq 0$

$$\text{donc } 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 \text{ ou } 0^2 \leq x^2 \leq (-3)^2$$

$$\text{donc } 0 \leq x^2 \leq 1 \text{ ou } 0 \leq x^2 \leq 9$$

$$\text{donc } 0 \leq x^2 \leq 9$$

4) On a $-6 \leq y \leq -2$ donc $(-2)^2 \leq y^2 \leq (-6)^2$

$$\text{donc } 4 \leq y^2 \leq 36$$

5) encadrement de : $x \times y$
 $-3 \leq x \leq 1$ et $-6 \leq y \leq -2$

Si $0 \leq x \leq 1$

on a $-6 \leq y \leq -2$ alors on a $2 \leq -y \leq 6$

donc $0 \leq -xy \leq 6$ donc ① $-6 \leq xy \leq 0$

Si $-3 \leq x \leq 0$ alors $0 \leq -x \leq 3$ et on a $2 \leq -y \leq 6$

donc ② $0 \leq xy \leq 18$

D'après ① et ② on déduit que : $-6 \leq xy \leq 18$

6) encadrement de : $\frac{x}{y}$ $-3 \leq x \leq 1$ On a

$-6 \leq y \leq -2$ donc $-\frac{1}{2} \leq \frac{1}{y} \leq -\frac{1}{6}$

donc $\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

Si $0 \leq x \leq 1$

on a $\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$ alors $0 \leq x \times \left(-\frac{1}{y}\right) \leq \frac{1}{2}$ donc

$0 \leq -\frac{x}{y} \leq \frac{1}{2}$ donc ③ $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq 0$

Si $-3 \leq x \leq 0$ alors $0 \leq -x \leq 3$ et on a $\frac{1}{6} \leq -\frac{1}{y} \leq \frac{1}{2}$

donc ④ $0 \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

D'après ③ et ④ on déduit que : $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{3}{2}$

3) Valeur approchée d'un nombre.

Définition :

Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r) lorsque $|x - a| \leq r$.

Définition : Soit a et x deux nombres et r un nombre strictement positif. On dit que a est une valeur approchée (ou approximation) du nombre x à r près (ou à la précision r), par défaut, lorsque $a \leq x \leq a + r$. a est une valeur approchée de x à r près, par excès, lorsque : $a - r \leq x \leq a$.

exemples: 1) on a $1,38 < \sqrt{2} < 1,42$ donc

$1,40 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$

$-0,02 < \sqrt{2} - 1,40 < 0,02$ donc $|\sqrt{2} - 1,40| < 0,02$

donc $1,40$ est une valeur approchée du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

2) on a $1,40 \leq \sqrt{2} < 1,40 + 0,02$ donc $1,40$ est une valeur approchée par défaut du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

3) on a $1,42 - 0,02 < \sqrt{2} < 1,42$ donc $1,42$ est une valeur approchée par excès du nombre $\sqrt{2}$ à $0,02$ près

4) Approximation décimale.

Définition : Soit $x \in \mathbb{R}$ et $N \in \mathbb{Z}$ et $p \in \mathbb{N}$

Si $N \times 10^{-p} \leq x \leq (N+1) \times 10^{-p}$ alors :

$N \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-p} près

$(N+1) \times 10^{-p}$ s'appelle une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-p} près

Exemple :

: on a $0,333333 < \frac{1}{3} < 0,333334$ donc

$333333 \times 10^{-6} < \frac{1}{3} < (333333+1) \times 10^{-6}$

333333×10^{-6} est une approximation décimale du nombre x par défaut à 10^{-6} près

$(333333+1) \times 10^{-6}$ est une approximation décimale du nombre x par excès à 10^{-6} près

« C'est en forgeant que l'on devient forgeron » Dit un proverbe.
 C'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices

Que l'on devient un mathématicien

