

Exemple : Déterminer les variations de la fonction f dérivable sur \mathbb{R} :

$$f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$$



- On calcule la dérivée : $f'(x) = -3x^2 + 6x = 3x(-x + 2)$
- On cherche les valeurs qui annulent la dérivée :

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

- Le signe de $f'(x)$ est celui d'un trinôme du second degré.
On obtient le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$	$-$
$f(x)$	$+\infty$		6	$-\infty$

2) Extremum d'une fonction

Théorème 3 : Soit une fonction f dérivable sur un intervalle I .

- Si $c \in I$ est un extremum local de f sur I alors $f'(c) = 0$
- Si $c \in I$, $f'(c) = 0$ et si f' change signe en c alors c est un extremum local de f sur I .

Exemple : Sur la fonction $f(x) = -x^3 + 3x^2 + 2$, étudiée plus haut, la dérivée $f'(x) = 3x(-x + 2)$, s'annule et change de signe en 0 et 2. On en déduit que 0 et 2 sont des extremum de f , respectivement minimum et maximum.

Remarque : Les extremum locaux d'une fonction sont à chercher parmi les zéros de la dérivée, mais si $f'(a) = 0$, a n'est pas nécessairement un extremum local. En effet, soit $f(x) = x^3$, sa dérivée $f'(x) = 3x^2$ s'annule en 0 mais ne change pas de signe. 0 n'est pas un extremum local.

Exercices corrigés

Exercice 1 : déterminer le nombre dérivé d'une fonction

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2 + x$.

1. En utilisant la définition du nombre dérivé, montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.
2. Vérifier le résultat sur la calculatrice.

Solution :

1. Pour tout réel h non nul, le taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$ est :

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 + (1+h) - (1^2 + 1)}{h} = \frac{3h + h^2}{h} = 3 + h$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} (3 + h) = 3$. Donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

Pour trouver la limite de $\tau(h)$ lorsque h tend vers 0, on peut souvent remplacer h par 0 après avoir simplifié l'expression (plus de h au dénominateur).

TI	Casio
<p>Appuyer sur la touche MATH puis 8 (nbreDérivé) :</p> <p style="text-align: center;">nbreDérivé = (X² + X, X, 1)</p>	<p>En mode RUN-MATH, utiliser les instructions F4</p> <p>(MATH) puis F4 (d/dx) :</p> $\frac{d}{dx}(X^2 + X, 1)$

Exercice 2 : la même chose, plein de fois

Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en a (en utilisant la définition) :

1. $f_1(x) = 5x - 3$ et $a = 1$
2. $f_2(x) = 3x^2 + 2x - 1$ et $a = 2$
3. $f_3(x) = \sqrt{x+3}$ et $a = -1$
4. $f_4(x) = \frac{x}{x+1}$ et $a = -2$

Solution :

1. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_1 entre 1 et $1 + h$ est : $\tau_1(h) = \frac{f_1(1+h) - f_1(1)}{h}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \frac{5(1+h) - 3 - (5 \times 1 - 3)}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = \frac{5h}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_1(h) = 5$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} 5 = 5$, donc f_1 est dérivable en $a = 1$ et $f'_1(1) = 5$.

2. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_2 entre 2 et $2 + h$ est : $\tau_2(h) = \frac{f_2(2+h) - f_2(2)}{h}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \frac{3(2+h)^2 + 2(2+h) - 1 - (3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 1)}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = \frac{3h^2 + 14h}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_2(h) = 3h + 14$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} 3h + 14 = 14$, donc f_2 est dérivable en $a = 2$ et $f'_2(2) = 14$.

3. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_3 entre -1 et $-1 + h$ est : $\tau_3(h) = \frac{f_3(-1+h) - f_3(-1)}{h}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{\sqrt{(-1+h)+3} - \sqrt{-1+3}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{(\sqrt{2+h} - \sqrt{2}) (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}{h \times (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{2+h-2}{h \times (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{h}{h \times (\sqrt{2+h} + \sqrt{2})}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_3(h) = \frac{1}{\sqrt{2+h} + \sqrt{2}}$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{2+h} + \sqrt{2} = \sqrt{2} + \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_3(h) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Par conséquent, f_3 est dérivable en $a = -1$ et $f_3'(-1) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

4. Pour tout $h \neq 0$, le taux d'accroissement de f_4 entre -2 et $-2+h$ est : $\tau_4(h) = \frac{f_4(-2+h) - f_4(-2)}{h}$ (*)

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{\frac{-2+h}{-2+h+1} - \frac{-2}{-2+1}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{\frac{-2+h}{h-1} - \frac{-2}{-1}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{\frac{-2+h}{h-1} - \frac{-2}{-1}}{h}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{1}{h} \times \frac{-2+h}{h-1} - \frac{2(h-1)}{h-1}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{1}{h} \times \frac{-h}{h-1}$$

$$(*) \Leftrightarrow \tau_4(h) = \frac{-1}{h-1}$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} h-1 = -1$, donc $\lim_{h \rightarrow 0} \tau_4(h) = \frac{-1}{-1} = 1$.

Par conséquent, f_4 est dérivable en $a = -2$ et $f_4'(-2) = 1$.

Exercice 3 : tangente par le nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x^2 - x$.

- Déterminer une équation de la tangente (\mathcal{T}) à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.
- Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

- Afin de déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1, déterminons tout d'abord si f est dérivable en 1.

– Méthode 1 : Calculons la limite du taux d'accroissement τ de f entre 1 et $1+h$. Pour tout $h \neq 0$:

$$\tau(h) = \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{2(1+h)^2 - (1+h) - (2 \times 1^2 - 1)}{h} = \frac{2h^2 + 3h}{h} = 2h + 3$$

Or, $\lim_{h \rightarrow 0} (2h + 3) = 3$, donc f est dérivable en 1 et $f'(1) = 3$.

– Méthode 2 : La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout x réel, on a

$$f'(x) = 2 \times 2x - 1 = 4x - 1$$

En particulier, f est dérivable en 1 et $f'(1) = 4 \times 1 - 1 = 3$.

Nous avons donc montré que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 3$. Par conséquent, la courbe \mathcal{C}_f admet une tangente non verticale, de coefficient directeur $f'(1) = 3$. Donc (\mathcal{T}) a une équation de la forme : $y = 3x + p$.

Or, $A(1 ; f(1)) \in (\mathcal{T})$, donc $y_A = 3x_A + p$ (*).

$$(*) \Leftrightarrow f(1) = 3 \times 1 + p$$

$$(*) \Leftrightarrow 2 \times 1^2 - 1 = 3 + p$$

$$(*) \Leftrightarrow 1 - 3 = p$$

$$(*) \Leftrightarrow p = -2$$

La tangente (\mathcal{T}) à \mathcal{C}_f au point $A(1 ; f(1))$ a donc pour équation $y = 3x - 2$.

TI	Casio
<p>(a) Saisir l'expression de $f(x)$ en Y1</p> <p>(b) Appuyer sur la touche  et choisir l'instruction dessin ( ) puis  (Tangente)</p> <p>(c) Régler la fenêtre d'affichage</p> <p>(d) Préciser la valeur de x en appuyant sur . Valider par . La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).</p>	<p>(a) Choisir l'instruction SET UP ( ). Activer le mode Derivative : choisir ON () , suivi de </p> <p>(b) Saisir la fonction en Y1 et tracer la courbe</p> <p>(c) Choisir l'instruction Sketch ( ). Sélectionner Tang ()</p> <p>(d) Appuyer sur  pour sélectionner la valeur de x, puis taper deux fois sur la touche . La tangente s'affiche ainsi qu'une équation (éventuellement approchée).</p>

Exercice 4 : Calculer des nombres dérivés à l'aide des formules

Pour les fonctions suivantes, déterminer le nombre dérivé en $x = 2$ puis en $x = \frac{1}{2}$:

- $f(x) = x^2$
- $g(x) = x^3$
- $h(x) = \frac{1}{x}$
- $i(x) = x^5$
- $j(x) = \sqrt{x}$

Solution :

1. La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a :

$$f'(x) = 2x$$

Par conséquent, $f'(2) = 2 \times 2 = 4$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} = 1$.

2. La fonction g est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_g$, on a :

$$g'(x) = 3x^2$$

Par conséquent, $g'(2) = 3 \times 2 = 6$ et $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

3. La fonction h est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, on a :

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Par conséquent, $h'(2) = -\frac{1}{2^2} = -\frac{1}{4}$ et $h'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = -4$.

4. La fonction i est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition. Pour tout $x \in \mathcal{D}_i$, on a :

$$i'(x) = 5x^4$$

Par conséquent, $i'(2) = 5 \times 2^4 = 80$ et $i'\left(\frac{1}{2}\right) = 5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$.

5. La fonction j est dérivable sur $]0 ; +\infty[$. Pour tout $x > 0$, on a :

$$j'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Par conséquent, $j'(2) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ et $j'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 5 : Tangente en utilisant les formules de dérivation

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Soit \mathcal{C}_f sa courbe représentative.

- Déterminer une équation de la tangente (\mathcal{T}) à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.
- Existe-t-il une tangente à \mathcal{C}_f parallèle à la droite (d) d'équation $y = 3x - 4$?
Si oui, déterminer les coordonnées du point de contact.

Solution :

- La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x , $f'(x) = 2x$.
Par conséquent, la tangente (\mathcal{T}) à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1 a pour coefficient directeur $f'(1) = 2$. Son équation est donc

$$y = 2x + p \text{ avec } p \in \mathbb{R}$$

De plus, $A(1 ; f(1)) \in (\mathcal{T})$, donc $y_A = 2x_A + p$, c'est-à-dire $f(1) = 2 \times 1 + p$, d'où $p = 1 - 2 = -1$.
Donc

$$(\mathcal{T}) : y = 2x - 1$$

- La fonction f étant dérivable sur \mathbb{R} , le coefficient directeur de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse x est $f'(x) = 2x$.
S'il existe une tangente parallèle à la droite (d) alors son coefficient directeur est le même que (d), c'est-à-dire 3. On cherche donc un réel x tel que

$$f'(x) = 3 (*)$$

$$(*) \Leftrightarrow 2x = 3$$

$$(*) \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$$

Donc \mathcal{C}_f admet une tangente parallèle à (d) au point $M\left(\frac{3}{2}; f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$ soit $M\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

Exercice 6 : encore une tangente avec un joli calcul de dérivée

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x - 3}{x^2 + 1}$. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f .

- Quel est l'ensemble de définition de f ?
- Déterminer une équation de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1.
- Vérifier le résultat sur calculatrice.

Solution :

- Pour tout réel x , $x^2 + 1 \neq 0$, donc f est définie sur \mathbb{R} .

- La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = 2x - 3$ et $v(x) = x^2 + 1$.

Les fonction u et v sont des fonctions polynômes, elles sont donc dérivables sur leur ensemble de définition \mathbb{R} . On a alors, pour tout réel x :

$$u'(x) = 2 \text{ et } v'(x) = 2x.$$

De plus, la fonction v ne s'annule pas sur \mathbb{R} , donc f est dérivable sur \mathbb{R} . Pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)} = \frac{2(x^2 + 1) - (2x - 3) \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 6x + 2}{(x^2 + 1)^2}$$

La fonction f est donc dérivable en $a = 1$ et $f'(1) = \frac{-2 \times 1^2 + 6 \times 1 + 2}{(1^2 + 1)^2} = \frac{3}{2}$.

Le coefficient directeur de la tangente \mathcal{T} à \mathcal{C}_f au point A d'abscisse 1 est donc $f'(1) = \frac{3}{2}$.

Donc \mathcal{T} a pour équation $y = \frac{3}{2}x + p$ où $p \in \mathbb{R}$.

De plus, $A(1; f(1)) \in \mathcal{T}$, donc $y_A = \frac{3}{2}x_A + p$, soit $\frac{-1}{2} = \frac{3}{2} + p$, donc $p = -2$.

D'où

$$\mathcal{T} : y = \frac{3}{2}x - 2$$

3. Voir l'exercice sur la tangente via le nombre dérivé (exercice 3).

Exercice 7 : tangente sans l'expression de la fonction

Soit \mathcal{C} la courbe représentative d'une fonction f dérivable en 3. On sait que $f(3) = -2$ et $f'(3) = 0,5$. Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{C} au point d'abscisse 3.

Solution :

La fonction f est dérivable en 3, donc la tangente (T) à \mathcal{C} au point d'abscisse 3 a pour équation $y = f'(3)x + p = 0,5x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.

Or, $f(3) = -2$, donc la tangente passe par le point $A(3 ; -2)$. Par conséquent, $y_A = 0,5x_A + p$, soit $-2 = 0,5 \times 3 + p$, d'où $p = -\frac{7}{2}$.

La tangente (T) a donc pour équation $y = \frac{1}{2}x - \frac{7}{2}$.

Exercice 8 : autour du nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.

- Calculer $f'(9)$ et $f'(3)$.
- Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = 2$?
- Existe-t-il des valeurs de x pour lesquelles $f'(x) = -1$?

Solution :

1. La fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Par conséquent, $f'(9) = \frac{1}{2\sqrt{9}} = \frac{1}{6}$ et $f'(3) = \frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

2. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{16}$.

Il existe donc un unique réel tel que $f'(x) = 2 : x = \frac{1}{16}$.

3. Pour tout $x > 0$, $f'(x) = -1 \Leftrightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}} = -1$. Or, pour tout $x > 0$, $\frac{1}{2\sqrt{x}} > 0$. Par conséquent, il n'existe pas de réel x tel que $f'(x) = -1$.

Exercice 9 : Tangente et second degré (que du bonheur !)

Soit f la fonction trinôme définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$. On note \mathcal{P} sa courbe représentative. On sait que $f(0) = 2$; $f(-1) = 5$ et $f'(-1) = 2$.

- Montrer que les réels a , b et c sont solution d'un système de trois équations à trois inconnues. Résoudre ce système.
- Déterminer une équation de la tangente à \mathcal{P} au point d'abscisse -1 .

Solution :

1. $f(0) = 2 \Leftrightarrow a \times 0^2 + b \times 0 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2$.

$f(-1) = 5 \Leftrightarrow a - b + c = 5 \Leftrightarrow a - b = 5 - c \Leftrightarrow a - b = 3$.

La fonction f est une fonction polynôme, elle est donc dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x , $f'(x) = 2ax + b$. Donc :

$f'(-1) = 2 \Leftrightarrow 2a(-1) + b = 2 \Leftrightarrow -2a + b = 2$.

Nous devons alors résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} a - b = 3 \\ -2a + b = 2 \end{cases}$$

Ce système est équivalent à

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ -2(3 + b) + b = 2 \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\begin{cases} a = 3 + b \\ b = -8 \end{cases}$$

Par conséquent, f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -5x^2 - 8x + 2$.

Vérifications :

(a) $f(0) = 2$

(b) $f(-1) = -5 + 8 + 2 = 5$

(c) $f'(-1) = -10 \times (-1) - 8 = 2$

2. f est dérivable en -1 et $f(-1) = 2$. Donc la tangente à \mathcal{P} au point d'abscisse -1 a pour équation $y = 2x + p$, avec $p \in \mathbb{R}$.

De plus, cette tangente passe par le point $A(1 ; f(1))$, donc $f(1) = 2 + p$, soit $-5 - 8 + 2 = 2 + p$, d'où $p = -13$.
La tangente à \mathcal{P} au point d'abscisse -1 a donc pour équation $y = 2x - 13$.